ملاحظة:

يقال عن فضاء طبولوجي انه قابل للفصل اذا كان يحوي مجموعة كثيفة قابلة للعد

مثال:

الفضاء الحقيقي R هو فضاء قابل للفصل لأنه يملك مجموعة كثيفة قابلة للعد هو Q

★ م ٦

س١: إذا كان لدينا فضاء طبولوجي (X, τ) متقطع

بين المجموعات الكثيفة لهذا الفضاء؟

يحوي ~~المجموعات الكثيفة~~ هذا الفضاء مجموعة كثيفة وحيدة هي X لأنه في المتقطع $\bar{X} = X$

لنفرض لدينا $A \neq X$ و $A \neq \emptyset$ عندها تكون مجموعة مغلقة و $\bar{A} = A$ فهي ليست كثيفة

لأن لصاقتها تساويها ولا تساوي X

مثال:

الفضاء (X, τ) غير متقطع τ طبولوجيا ضعيفة

لنفرض $A \neq \emptyset$ ومنه $\bar{A} = X$ فهيا كثيفة وبالتالي في هذا الفضاء جميع المجموعات

كثيفة ماعدا الـ $\emptyset$ لأن $\tau = \{X, \emptyset\}$

- اللصاقة أصغر مجموعة تحوي نفسها.

فضاء الطبولوجيا المتممات المنتهية:

لتكن X مجموعة غير منتهية إذا كان A مجموعة جزئية من X فنقصد بالرمز $|X \setminus A| < \infty$

المتممة المنتهية أي متممة A مجموعة منتهية لنعرف طبولوجي على الشكل التالي τ

أسرة المجموعات الجزئية من X التي متمماتها منتهية

متمماتها ليست منتهية $\tau = \{U \subseteq X : |X \setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$

تدعى طبولوجيا المتممات المنتهية والفضاء الناتج فضاء المتممات المنتهية

لنتأكد أن τ طبولوجيا؟؟

① شرط الاجتماع لنفرض $\{U_\alpha\} \in \tau$ أسرة من عناصر τ

لنثبت أن الاجتماع من τ $\bigcup U_\alpha$ لنأخذ $X / \bigcup U_\alpha$

$X / \bigcup U_\alpha = \bigcap (X \setminus U_\alpha)$ حسب دمورغان

← مجموعة منتهية و.ه.م $\bigcup U_\alpha \in \tau$

② بالنسبة للتقاطع $U_1, \dots, U_n \in \tau$ لنثبت أن $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$

لنأخذ المتممة $X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ حسب دمورغان $X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$ منتهية

٣) $\emptyset = X/X$ و $X \setminus \emptyset = X$ ومنه $\emptyset , X \in \tau$ ومنه τ طبولوجيا

المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء هي أي مجموعة متممتها منتهية بالإضافة الى $\emptyset$

بالإضافة الى ان المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية بالإضافة لـ X

مثال

لنفرض $X = N$ مجموعة الأعداد الطبيعية

١) مجموعة مفتوحة: $u_1 = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$ مفتوحة

لأن متممتها منتهية $X \setminus u_1 = \{1, 2\}$

وايضاً $u_2 = \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20 \ldots\}$

متممتها منتهية $X \setminus u_2 = \{4, 5 \ldots 16\}$

٢) مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة:

الأعداد الفردية $A = \{1, 3, 5, 7 \ldots\}$ غير منتهية متممها غير منتهية

أو الأعداد الزوجية أو مضاعفات عدد

* في هذا الفضاء تتحقق الخاصة التالية:

اي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين تتقاطعان

مثلا: $u, v \in \tau$ مجموعتين مفتوحتين وغير خاليتين

البرهان: نفرض ان $u \cap v = \emptyset$ هذا يعني متممة اي منهما تحوي الأخرى على سبيل المثال $X \setminus u \supseteq v$ وهذا غير ممكن لأن $u \in \tau \Leftarrow X \setminus u$ منتهية في حين

أن $v \in \tau$ هي غير منتهية وهذا خاطئ ومنه $u \cap v \neq \emptyset$

وبالتالي أي جوارين لأي نقطتين يتقاطعان في هذا الفضاء $X = N$

مثال:

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء المتممات المنتهية X أوجد:

$Ext(A)$; $Fr(A)$, A' , $\bar{A}$, A°

نميز حالتين:

١) A مجموعة منتهية

لأنها لا تحوي مجموعة مفتوحة (غير منتهية) $A^\circ = \emptyset$

منتهية ⇐ مغلقة $\bar{A} = A$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = A$

$Ext = X / A^\circ = X \setminus A$

Date : / / Subject:

لنأخذ $A=\{1,2,3\}$ ← لأن $\bar{A}=\emptyset$

لو أخذنا $U=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,6,5,...\}$ مفتوحة متممتها مغلقة تحوي الواحد فيها جوار له

$U\cap A\setminus\{1\}=\emptyset$ ومنه الواحد ليس نقطة تراكم ويطبق ع اي عنصر هنا

حالة ② A مجموعة غير منتهية

هناك أحتمالان بالنسبة لـ A° = A°

الأول أن متممة A منتهية X/A عندها A مفتوحة حسب تعريف وبالتالي $A^{\circ}=A$

والثاني أن متممة A غير منتهية X/A عندها $A^{\circ}=\emptyset$

في هذا الفضاء اي مجموعة غير منتهية ← $\bar{A}=X$

تكون كثيفة لأن لنفرض U جوار كيفي لـ X ومنه

$U\cap A\neq\emptyset$ ومنه X لاصقة لأنه لو كان $U\cap A=\emptyset$ ⇐

$A\subset X/U$ وهذا مستحيل لأن $X\setminus U$ منتهية و A غير منتهية

$Fr=\bar{A}\setminus A^{\circ}=$

$Ext=X/\bar{A}=$

$\bar{A}=X$

ورقة ٧ ص١٧

برهن $Ext(A\cup B)=Ext A\cap Ext B$ الخارجية = متممة اللاصقة

$X\setminus\overline{A\cup B}=X\setminus(\bar{A}\cup\bar{B})$

حسب ديمورغان $X\setminus\overline{A\cup B}=(X\setminus\bar{A})\cap(X\setminus\bar{B})$

التطبيقات المستمرة:

تعريف: ليكن f معرف $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ و $x_0\in X$ نقطة من المنطلق نقول عن التطبيق f أنه مستمر في النقطة x_0 إذا كان من أجل أي جوار V لـ النقطة $f(x_0)$ من Y يوجد جوار U للنقطة x_0 في X بحيث $f(U)\subseteq V$

مبرهنة:

يكون التطبيق $f:X\to Y$ من الفضاء الطبولوجي X إلى الفضاء الطبولوجي Y مستمر في نقطة x_0 من X إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي جوار للنقطة $f(x_0)$ في Y هي جوار للنقطة x_0 في X شرط اللازم والكافي ليكن f تطبيق مستمر

البرهان:

Date : / / Subject:

لنفرض f مستمرة في X_0 عندئذٍ حسب التعريف من أجل أي جوار V لـ $f(X_0)$ يوجد جوار u للنقطة X_0 بحيث $f(u) \subseteq V$

ومن هنا نجد أن $u \subseteq f^{-1}(f(u)) \subseteq f^{-1}(V)$

u فرضنا جوار X_0 وما يحوي الجوار جوار لـ X_0 ومنه $f^{-1}(V)$ جوار لـ X_0

وبالعكس لنفرض الشرط محقق عندها من أجل أي جوار V لـ $f(x)$ يوجد جوار u لـ X_0 بحيث $f^{-1}(V) = u$ بحيث

$f(u) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ ومنه التطبيق مستمر في نقطة X_0

حتى يكون $f^{-1}(V)$ مستمر يجب أن يكون تقابل (متباين - تام)

$$f^{-1}(V) = \{ x \in X : f(x) \in V \}$$

مثال أذا كان لدينا $y = \sin x$

$f^{-1}(0) = k\pi$ و $k = 0, 1, 2 \ldots$

$y = f(x) = x^2$

$f^{-1}(1) = \mp 1$, $f^{-1}(4) = \mp 2$